# ඩිරැක් සමීකරණය

සම්භාව්‍ය භෞතික විද්‍යාවෙහි දී අංශුවක E චාලක ශක්තිය එහි p ගම්‍යතාව ඇසුරෙන් $E = p^2 / 2m$ ලෙස ලිවිය හැකි බව සඳහන් කෙළෙමු. සම්භාව්‍ය භෞතිකයෙහි සිට ක්වොන්ටම් භෞතිකයට යෑමේ දී වැදගත්වන සංකල්පයක් වනුයේ අංශුවක හෝ පද්ධතියක හෝ හැමිල්ටෝනියානුව (Hamiltonian) යන්න ය. සාධාරණ පද්ධතියක් සඳහා හැමිල්ටෝනියානුව යන්නට අර්ථ දැක්වීමක් ඇති නමුදු ඒ තේරුම්කිරීමට තවත් සංකල්ප ගණනාවක් අවශ්‍ය බැවින් මෙහි දී ඒ සඳහන් නො කෙරෙයි. එහෙත් පද්ධතිය හෝ අංශුව හෝ සංස්ථිතික වන විට, එනම් ඒ මත ක්‍රියාකරන බාහිර බල සංස්ථිතික වන විට හැමිල්ටෝනියානුව පද්ධතියෙහි හෝ අංශුවෙහි හෝ චාලක ශක්තියෙහි හා විභව ශක්තියෙහි ඓක්‍යයට සමාන වෙයි. හැමිල්ටෝනියානුව, චාලක ශක්තිය හා විභව ශක්තිය පිළිවෙළින් H, T හා V ලෙස ගත්විට ඒ සම්බන්ධය $H = T + V$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි ය. කලින් අපි චාලක ශක්තිය E ලෙස ලිව්වෙමු. එය T ලෙස නොලිව්වේ ඇයිදැයි සමහරවිට යමකුට ප්‍රශ්නයක් වීමට ඉඩ ඇත. එයට හේතුව කලින් අවස්ථාවෙහි අප ඒ බව ප්‍රකාශිතව සඳහන් නොකළ ද එහි දී අප නිදහස් අංශුවක් සැලකීම ය.

නිදහස් අංශුවක් මත බාහිර බලයක් ක්‍රියා නොකරයි. එවිට අංශුවට විභව ශක්තියක් නැත. අංශුවකට හෝ පද්ධතියකට හෝ විභව ශක්තියක් ලැබෙනුයේ ඒ මත සංස්ථිතික බල ක්‍රියාකරන අවස්ථාවක ය. නිදහස් අංශුවක් සඳහා විභව ශක්තියක් නොමැති බැවින් එවැනි අවස්ථාවක දී $H = T = E = p^2 / 2m$ වෙයි. E යන්නෙන් සාමාන්‍යයෙන් අදහස් කෙරෙන්නේ චාලක ශක්තියෙහි හා විභව ශක්තියෙහි ඓක්‍යය වෙයි. එහෙත් මෙහි දී ඒ චාලක ශක්තිය පමණක් වෙයි. දැන් කාහට හෝ ප්‍රශ්නයක් වනු ඇත්තේ H හා E දෙකෙන්ම T + V හැඳින්වෙන්නේ නම් H යනුවෙන් අළුත් සංකේතයක් අවශ්‍යවන්නේ කුමක් සඳහා ද යන්න ය. එයට හේතුව H යනු සාමාන්‍යයෙන් T + V නොවීමත් එය විශේෂ අවස්ථාවල දී පමණක් ඒ අගය ගන්නා බවත් ය. ක්වොන්ටම් භෞතික විද්‍යාවෙහි දී මෙයට තවත් හේතුවක් වෙයි. එහි දී හැමිල්ටෝනියානුව යනු ශක්තියක් නො වෙයි. ක්වොන්ටම් භෞතික විද්‍යාවෙහි දී හැමිල්ටෝනියානුව කාරකයක් (Operator) වෙයි. කාරකයක් ගැන කතාකිරීමට පළමුව සංස්ථිතික බල යටතේ චලනය වන අංශුවක් සඳහා H ලියන ආකාරය ගැන අවබෝධයක් ලබාගත යුතු ය.

අංශුවක් මත සංස්ථිතික බල ක්‍රියාකරන වන විට එයට V විභව ශක්තියක් වෙයි. එවිට $E = T + V$ වෙයි. නමුත් T යනු චාලක ශක්තිය බැවින් ඒ ප්‍රකාශනය $E = p^2/2m + V$ ලෙස ලිවිය හැකි ය. එමෙන් ම H ද T + V බැවින් අපට $H = p^2/2m + V$ ප්‍රකාශනය ද ලැබෙයි. ක්වොන්ටම් භෞතික විද්‍යාවෙහි නිව්ටෝනීය භෞතික විද්‍යාවෙහි මෙන් චලිත සමීකරණ නො ලියැවෙයි. ක්වොන්ටම් භෞතිකයෙහි දී වැදගත්වන්නේ ෂ්රෑඩිංගර් සමීකරණය ය. ඒ සමීකරණය කාල පරායත්ත හා කාල ස්වායත්ත යනුවෙන් ස්වරූප දෙකක් ගනියි. කාල ස්වායත්ත යනුවෙන් සමීකරණය හැඳින්වෙන්නේ අංශුව හෝ පද්ධතිය හෝ මත ක්‍රියාකරන බාහිර බල කාලයෙන් ස්වායත්ත වූ අවස්ථාවෙහි දී ය. කාලය සමග බල වෙනස්වන්නේ නම් එවිට යොදාගත යුත්තේ කාල පරායත්ත සමීකරණ ය.

කාල ස්වායත්ත අවස්ථාවෙහි දී මෙන් ම කාල පරායත්ත අවස්ථාවෙහි දී ද අංශුව හෝ පද්ධතිය හෝ තරංග ශ්‍රිතය යැයි හැඳින්වෙන යම්කිසි ශ්‍රිතයකින් නිරූපණය කෙරෙයි. මේ ශ්‍රිත අවකාශයෙහි හා කාලයෙහි ශ්‍රිත බව පමණක් දැන සිටීම මෙහි දී ප්‍රමාණවත් වෙයි. ශ්‍රිතය $\psi$ යනුවෙන් ලියුවහොත් මෙයින් කියන්නේ අවකාශ ඛණ්ඩාංක වූ x, y, z, හා t කාලය ඇසුරෙන් $\psi$ ලිවිය හැකි බව ය. ගණිතයේ සංකේත භාවිතාකරන්නේ නම් එය $\psi = \psi(x. y, z, t)$ ලෙස ලිවිය හැකි ය. $\psi$ කාලයෙන් ස්වායත්ත නම් එය $\psi = \psi(x. y, z)$ ලෙස x, y හා z හි පමණක් ශ්‍රිතයක් ලෙස ලියනු ලැබෙයි.

ක්වොන්ටම් භෞතිකයෙහි විවිධ විචරණ අනුව අපට නිරීක්ෂණයකළ හැකි දෑ, එනම් නිරීක්ෂ්‍ය (observables), කාරක මගින් නිරූපණය කෙරෙයි. අපි අංශුවක් ගනිමු. මේ අංශුවේ ශක්තිය නිරීක්ෂණය කිරීමට අපට අවශ්‍ය යැයි සිතමු. එනම් අපට අංශුවේ ශක්තිය මැනගැනීමට අවශ්‍ය යැයි සිතමු. අංශුවේ ශක්තිය මැනගැනීමෙන් පසුව අපට ඒ

© Prof. Nalin De Silva

සඳහා යම් අගයක් ලැබෙයි. ක්වොන්ටම් භෞතික විද්‍යාවෙහි උපග්‍රහණවලට (postulates) අනුව අපට මැනීමෙන් ලැබෙන අගය කල්තබා නිශ්චිතව නො කිවහැකි ය. අපට කිවහැක්කේ යම් අගයක් ලැබීමට යම් සම්භාවිතාවක් තිබෙන බව ය. ඒ ලැබීමට ඇති අගය කවරේද යන්න දැනගතහැක්කේ ෂ්‍රෝඩිංගර් සමීකරණය යනුවෙන් හැඳින්වෙන සමීකරණයක් විසඳීමෙන් ය.

ෂ්‍රෝඩිංගර් සමීකරණය කාල ස්වායත්ත හා කාල පරායත්ත යනුවෙන් සාමාන්‍යයෙන් ආකාර දෙකක් ගනියි. කාල ස්වායත්ත අවස්ථාවෙහි දී ඒ සමීකරණය $H\psi = E\psi$ යනුවෙන් ලියැවෙයි. මෙහි H යනු අංශුවෙහි හැමිල්ටෝනියානුව වන අතර එය ද $\psi$ ද කාලයෙන් ස්වායත්ත වෙයි. මේ සමීකරණය විසඳීම සඳහා දෙනු ලබන්නේ H පමණ ය. $\psi$ මෙන් ම E ද සමීකරණය විසඳීමෙන් ලබාගත යුතුවෙයි. මේ සමීකරණයෙහි H යනු කාරකයක් වෙයි. ඒ හැමිල්ටෝනියානු කාරකය ය. හැමිල්ටෝනියානු කාරකය තරංග ශ්‍රිතය මත යෙදීමෙන් අංශුවේ ශක්තියට ගතහැකි අගය සඳහා විසඳුම් E මගින් ලැබෙයි. ශක්තිය නිරූපණය කරන කාරකය තරංග ශ්‍රිතය මත යෙදීමෙන් ශක්තියට ගතහැකි අගය ගැන අවබෝධයක් ලබාගත හැකිවේ ය යන්න මෙහි දළ අදහස වෙයි. ඒ අගය ලබාගන්නේ කාල ස්වායත්ත ෂ්‍රෝඩිංගර් සමීකරණයේ විසඳුම් ලෙස ය. ඒ අගය රාශියක් තිබිය හැකි ය. අංශුවේ ශක්තිය මැන්නොත් ලැබිය හැක්කේ මේ අගයන්ගෙන් එකකි. ඒ ඕනෑම අගයක් ලැබීමේ යම්කිසි සම්භාවිතාවක් වෙයි. කාල ස්වායත්ත අවස්ථාවේ දී ඒ සමීකරණය විසඳීමේ ගැටළුවක් නැත. එහෙත් කාල පරායත්ත අවස්ථාවෙහි දී තරමක ගැටළුවකට මුහුණදීමට සිදුවෙයි.

ක්වොන්ටම් භෞතික විද්‍යාවෙහි E ශක්තිය හා p ගම්‍යතාව සඳහා අවකල ප්‍රකාශන වෙයි. තරංග ශ්‍රිතය අවකාශ ඛණ්ඩාංක අනුබද්ධයෙන් අවකලනයකිරීමෙන් ගම්‍යතාව ද ඒ ශ්‍රිතය කාලය විෂයයෙහි අවකලනයකිරීමෙන් ශක්තිය ද ලැබෙයි. එහෙත් මෙහි දී ප්‍රශ්නයකට මුහුණපෑමට සිදුවෙයි. කාල පරායත්ත ෂ්‍රෝඩිංගර් සමීකරණයෙහි වම්පැත්තේ ඇති හැමිල්ටෝනියානු කාරකයෙහි $p^2/2m$ යනුවෙන් පදයක් වෙයි. එනම් එහි p හි වර්ගජ පදයක් වෙයි. මෙහි තේරුම මේ වර්ගජ පදය ලබාගැනීමේ දී අවකාශ ඛණ්ඩාංක විෂයයෙහි දෙවරක් අවකලනය කළයුතු බව ය. එහෙත් කාල පරායත්ත ෂ්‍රෝඩිංගර් සමීකරණයෙහි දකුණු පැත්තේ ඇත්තේ E වලින් ඒකජ ප්‍රකාශනයක් ය. E ලබාගන්නේ තරංග ශ්‍රිතය කාලය විෂයයෙහි අවකලනයකිරීමෙන් ය. එහෙත් දැන් E හි ඒකජ ප්‍රකාශනයක් පමණක් ඇති බැවින් තරංග ශ්‍රිතය කාල විෂයයෙහි අවකලනයකිරීමට ඇත්තේ එක් වරක් පමණක් වෙයි.

මෙහි තරමක ගැටළුවක් ඇති බව පැහැදිලි විය යුතු ය. කාලය විෂයයෙහි එක්වරක් අවකලනයකරන විට අවකාශය විෂයයෙහි දෙවරක් අවකලනයකිරීමට සිදුවෙයි. මේ සාපේක්ෂතාවාදයට පටහැණි වෙයි. සාපේක්ෂතාවාදයට අනුව කාලය හා අවකාශය අතර සමමිතියක් තිබිය යුතු ය. මෙහි දී මේ ගැටළුවෙන් මිදියහැකි ක්‍රමයක් වෙයි. ඒ $E = p^2/2m$ සාපේක්ෂතාවාදී ප්‍රකාශනයක් නොවන බව සඳහන්කිරීමෙන් ය. සාපේක්ෂතාවාදී නොවන හුදු නිව්ටෝනීය සම්බන්ධතාවලින් ලබාගන්නා ප්‍රකාශනවල අවකාශය හා කාලය සම්බන්ධයෙන් සමමිතියක් බලාපොරොත්තු නොවිය යුතු යැයි කීමට හැකි ය.

ඒ තර්කය පිළිගත හැකිවුව ද ගැටළුව මුළුමනින්ම නැතිවී ගියේ යැයි නො සිතියයුතු ය. සාපේක්ෂතාවාදී අවස්ථාවෙහි $E = p^2/2m$ යන්න වෙනුවට ඇත්තේ $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$ යන ප්‍රකාශනය ය. මේ ප්‍රකාශනයෙහි E මෙන් ම p සඳහා ද ඇත්තේ වර්ගජ පද ය. එබැවින් ක්වොන්ටම් කාරක ලෙස ලිවීමේ දී ඒ පද දෙක පිළිවෙළින් කාලය විෂයයෙහි හා අවකාශ ඛණ්ඩාංක විෂයයෙහි දෙවරක් අවකලනය කර ප්‍රකාශන ලබාගැනීමට හැකිවෙයි. එපමණට සාපේක්ෂතාවාදී සමමිතිකයක් තිබෙන නමුත් ගැටළුව වනුයේ ඒකජ සමීකරණයක් ලිවීම ය. ෂ්‍රෝඩිංගර් සමීකරණයෙහි එක් පැත්තක් ලියැවෙන්නේ E හි ඒකජ ප්‍රකාශනයක් ලෙස ය. මේ ඒකජ ප්‍රකාශනය කාරකයක් ලෙස ලිවීමේ දී කාලය අනුබද්ධයෙන් එක් වරක් පමණක් අවකලනයකිරීමට සිදුවෙයි. එසේ නම් කාල පරායත්ත ෂ්‍රෝඩිංගර් සමීකරණය සාපේක්ෂතාවාදී අවස්ථාවේ දී ලිවීමේ දී අවකාශ ඛණ්ඩාංක සම්බන්ධයෙන් ද එක්වරක් පමණක් අවකලනයකිරීමට සිදුවන සේ සමීකරණය සකස්කර ගැනීමට සිදුවෙයි.

© Prof. Nalin De Silva

බ්‍රිතාන්‍ය ජාතික පෝල් ඩිරැක් නම් විද්වතා තම අවධානය යොමුකෙළේ මේ ප්‍රශ්නයට ය. ඔහු එහි දී ඉතාමත් විප්ලවීය අදහසක් ඉදිරිපත්කෙළේ ය. ඔහුගේ අදහස පැහැදිලිවම කිවහැක්කේ ගණිත ප්‍රකාශන යොදාගැනීමෙන් ය. එහෙත් දැනටමත් ගණිත ප්‍රකාශන රාශියක් ඉදිරිපත්වී ඇති හෙයින් ඩිරැක් විද්වතා හඳුන්වාදුන් ප්‍රකාශනය මෙහි ලියාදැක්වීම යෝග්‍ය නො වෙයි. එහෙත් කිවයුතුව ඇත්තේ ඩිරැක් විද්වතා න්‍යාස (matrices) ද ඇසුරෙන් ඒකජ ප්‍රකාශනයක් ලිවීමට සමත්වූ බව ය. ඒ ඒකජ ප්‍රකාශනයක් වීම හා කාලය හා අවකාශ ඛණ්ඩාංක සම්බන්ධයෙන් සමමිතිකවීම මෙහි දී වැදගත්වන කරුණු වෙයි. ඩිරැක් විද්වතා ඒ කාර්යය කිරීම සඳහා එක්තරා ආකාරයකින් ගතහොත් සාපේක්ෂතාවාදී අවස්ථාවෙහි ලැබෙන කාල පරායත්ත ෂ්‍රැඩිංගර් සමීකරණය වර්ගජ ප්‍රකාශනයක් ලෙස ගෙන එහි සාධක සෙවී ය. ඔහු මේ සාධක සොයාගත්තේ න්‍යාස ද ආධාර කරගනිමින් ය.

ඩිරැක් විද්වතා විසින් මුලින් ම ලියන ලද සාපේක්ෂතාවාදී ෂ්‍රැඩිංගර් සමීකරණය වර්තමානයෙහි දී ඔහුගේ නමින් ඩිරැක් සමීකරණය ලෙස හැඳින්වෙයි. එහෙත් ඒ සමීකරණය හා සාපේක්ෂතාවාදී නොවන සමීකරණය අතර අනුරූපතාවක් නැත. යම්කිසි ආකාරයක කෘත්‍රිම බවක් එහි දැකියහැකි ය. එසේ වුව ද ඩිරැක් සමීකරණය බටහිර භෞතික විද්‍යාවේ ඇති වැදගත් ම සමීකරණවලින් එකක් වෙයි. එය ක්වොන්ටම් ක්ෂෙත්‍ර ප්‍රවාදය (Quantum Field Theory) යනුවෙන් හැඳින්වෙන ප්‍රවාදයෙහි මූලික සමීකරණය වෙයි. ඒ ප්‍රවාදය සමස්ත බටහිර භෞතික විද්‍යාවෙහි ම වඩාත්ම සාර්ථක ප්‍රවාදය ලෙස හැඳින්වෙයි. එහෙත් මේ සමීකරණය ලබාගැනීමේ දී ක්වොන්ටම් භෞතික විද්‍යාව හා සාපේක්ෂතාවාදය එක්කිරීමට සිදුවිය. එහෙත් මේ එක්කිරීම දාර්ශනික හා වෙනත් ගැටළුවලින් මිදී නැති බව පමණවත් කිවයුතු ය.

**මහාචාර්ය නලින් ද සිල්වා**

© Prof. Nalin De Silva