අතාත්ත්වික මාන

අප දිග මනින්නේ වක්‍රයක් දිගේ ය. ලක්ෂ්‍ය දෙකක් අතර දුර යනු ද යම් වක්‍රයක් දිගේ මැනෙන දිගක් වෙයි. ලක්ෂ්‍ය දෙකක් අතර දුර කෙටිම වන්නේ සරල රේඛාවක් දිගේ ය. දිග යනු තාත්ත්වික යැයි කියැවෙන සංඛ්‍යාවකින් නිරූපණය වන්නකි. x අක්ෂය ලෙස අක්ෂයක් නම්කිරීමෙන් පසුව මූලයෙහි සිට දකුණට පිහිටි ලක්ෂ්‍ය මූලයෙහි සිට ඒ ලක්ෂ්‍යවලට ඇති දුරට සමාන වූ සංඛ්‍යාවලින් ද, වමට පිහිටි ලක්ෂ්‍ය මූලයෙහි සිට ඒ ලක්ෂ්‍යවලට ඇති දුරට සමාන සංඛ්‍යාවක සෘණ අගයෙන් ද නිරූපණය කෙරෙයි. x අක්ෂයට ලම්බ ව මූලය ඔස්සේ යන y අක්ෂයක් ගැනීමෙන් තත්ත්වයෙහි සැලකිය යුතු වෙනසක් සිදු නො වෙයි. දකුණ හා වම වෙනුවට එහි දී අපට උඩ හා පහත යනුවෙන් වූ අභිදිශා දෙකක් ඇත. උඩ පැත්ත ධන ලෙස ද පහත පැත්ත සෘණ ලෙස ද සාමාන්‍ය සම්මුතියෙන් ගැනෙයි.

එහෙත් මෙය සම්මුතියක් පමණක් බව අපට අමතක වෙයි. x අක්ෂය හා y අක්ෂය වෙන වෙන ම පවතින අක්ෂ දෙකක් ලෙස ගැනීමෙන් අපට එවැනි තත්ත්වයක් උදාකර ගත හැකි ය. මේ අක්ෂ දෙක එකිනෙක සමග යම් ආකාරයක සම්බන්ධතාවකින් බැඳී ඇතැයි සිතමු. අක්ෂ දෙකෙහි ස්වාධීනත්වය නැතිකෙරෙන්නේ අක්ෂ අතර යම් සම්බන්ධතාවක් ඇති කෙරීමෙන් ය. අක්ෂ දෙක එකට ගෙන එක් අක්ෂයක් තාත්ත්වික (real) අක්ෂය ලෙස ද, අනෙක් අක්ෂය අතාත්ත්වික (imaginary) අක්ෂය ලෙස ද ගැනීමෙන් අපට අක්ෂ දෙකෙන් නිර්ණයවන තලයෙහි සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් නිරූපණය කළහැකි ය. මෙය ආගන්ඩ් සටහනෙහි පදනම වෙයි.

කලින් සඳහන්කර ඇති ආකාරයට එවිට අතාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකින් ගුණකිරීම යම් රේඛා ඛණ්ඩයක් සෘජු කෝණයකින් වාමාවර්තව කරකැවීමක් ලෙස සැලකිය හැකි ය. යම් සංඛ්‍යාවක් අතාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකින් ගුණකර ලැබෙන ප්‍රතිඵලය නැවතත් අතාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකින් ගුණකිරීම මුල් සංඛ්‍යාව සෘණ සංඛ්‍යාවකින් ගුණකිරීමට සමානවන බව අපි දනිමු. ඒ බව ආගන්ඩ් සටහනෙන් ද පැහැදිලි වෙයි.

දැන් ප්‍රශ්නය වනුයේ දී ඇති තලයක එකිනෙකට ලම්බ වූ අක්ෂ දෙකකින් කිනම් අක්ෂයක් තාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ගන්නේ ද යන්නත් කිනම් අක්ෂයක් අතාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ගන්නේ ද යන්නත් ය. කිනම් අක්ෂයක් වුව ද තාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ගතහැකි ය යන්න ඒ ප්‍රශ්නයට දියහැකි පිළිතුර වෙයි. ඕනෑම අක්ෂයක් තාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ගත්කල එයට ලම්බ අක්ෂය අතාත්ත්වික අක්ෂය වෙයි. එහි ගැටළුවක් තිබිය හැකි නො වෙයි. සියල්ල සම්මුතියක් පමණ ය. සම්මුතියෙන් එක් අක්ෂයක් තාත්ත්වික අක්ෂය බවට ද එයට ලම්බ අක්ෂය අතාත්ත්වික අක්ෂය බවට ද පත්වෙයි.

මෙය තවදුරටත් පැහැදිලි කරගැනීම සඳහා අක්ෂයක ධන හා සෘණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ආකාරය විමසා බලමු. අපි සාමාන්‍යයෙන් අක්ෂයක මූල ලක්ෂ්‍යය තෝරාගැනීමෙන් පසුව ඒ ලක්ෂ්‍යයෙන් දකුණුපස ධන ලෙස ද වම්පස සෘණ ලෙස ද ගනිමු. මේ තෝරාගැනීම වුව ද සාපේක්ෂ බව අපට බොහෝ විට නො වැටහෙයි. අක්ෂයක නැත්නම් රේඛාවක දකුණුපස යන්නෙන් අදහස් කරන්නේ කුමක් ද? අප ඉදිරිපස ඇති රේඛාවක දකුණුපස යනු අපේ දකුණු අත පැත්තට නැත්නම් අභිදිශාවට වූ කොටස ය. දැන් සරල රේඛාවක් මැදින් තබාගෙන දෙදෙනකු දෙපැත්තේ සිටින්නේ යැයි සිතමු. ඉන් එක් අයකුගේ දකුණුපස අනෙක් අයගේ වම්පස වන බව පැහැදිලි ය. එක් අයකු තමාගේ දකුණුපසට ඇති රේඛා ඛණ්ඩය ධන ලෙස ලකුණු කළහොත් අනෙක් අය ඒ රේඛා ඛණ්ඩය සෘණ ලෙස ලකුණු කරයි. එයට හේතුව අදාළ රේඛා ඛණ්ඩය අනෙක් අයගේ වම්පසට පිහිටා තිබීම ය. එක් අයකු ධන යැයි ගන්නා අභිදිශාව තවත් අයකු විසින් සෘණ ලෙස ගනු ලැබිය හැකි ය.

ආගන්ඩ් සටහනෙහි ද සිදුවන්නේ එවැන්නකි. යම් අයකු තාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ගන්නේ තමා ඉදිරිපිට ඇති වම්පස සිට දකුණුපසට දිවෙන රේඛාවකි. එහි මූලයේ සිට වම් අතට ඇති රේඛා ඛණ්ඩයෙන් සෘණ සංඛ්‍යා ද දකුණුපසට ඇති රේඛා ඛණ්ඩයෙන් ධන සංඛ්‍යා ද නිරූපණයවන්නේ යැයි ගනු ලැබෙයි. තවත් අයකු ඒ රේඛාවට ලම්බ වූ රේඛාවක් තමාගේ වම්පස සිට දකුණුපසට දිවෙන රේඛාව ලෙස ගන්නවා විය හැකි ය. එවිට ඒ තැනැත්තා තම තාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ගන්නේ ඒ ලම්බ රේඛාව ය. ඒ රේඛාව මුල් තැනැත්තාගේ අතාත්ත්වික අක්ෂය වෙයි.

තාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ගත්ත ද අතාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ගත්ත ද, මූලයේ සිට අක්ෂයේ ඇති ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයකට ඇති දුර මිනුමක් ලෙස ගත්කල ධන වෙයි. අදාළ ලක්ෂ්‍යයෙන් තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් නිරූපණය වුව ද අතාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් නිරූපණය වුව ද ඒ ලක්ෂ්‍යයට මූලයේ සිට ඇති දුර ධන වෙයි. මෙය තාත්ත්වික හා අතාත්ත්වික අක්ෂවලට පමණක් සීමාවූ ගුණයක් නො වෙයි. ආගන්ඩ් සටහනෙහි ඕනෑම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් නිරූපණයකරන ලක්ෂ්‍ය දෙකක් අතර දුර ධන වෙයි. එයට හේතුව කලින් සඳහන්කර ඇති ආකාරයට දුර යනු මැනෙන්නක් ලෙස ගැනීම ය. ඍණ දුරක් ගැන ද කතාකළ හැකි ය. කොළඹ සිට ගාල්ලට යන ගමනක දී යම් අයකු තමා ඍණ කිලෝමීටර දහයක් දුර ගෙවා ඇතැයි කිවහොත් ඉන් කියැවෙන්නේ ඔහු කොළඹ සිට ගාල්ලට විරුද්ධ අතට කිලෝමීටර දහයක් ගොස් ඇති බව ය. ඒ විරුද්ධ අතට ගොස් ඇති දුර ද මැනෙන්නේ ධන කිලෝමීටර ලෙස බව අමතක නොකළ යුතු ය.

මෙයින් පැහැදිලිවන්නේ කුමක් ද? අප ඒකමානයට පමණක් සීමාවුවහොත් එහි අපට ලක්ෂ අනන්තයක් එක් වක්‍රයක් දිගේ ලබාගත හැකි වෙයි. (මේ වක්‍රය සරල රේඛාවක් ම විය යුතු නො වෙයි.) එහි මූල ලක්ෂ්‍යයක් තෝරාගැනීමෙන් පසුව ඒ ලක්ෂ්‍යයෙන් දකුණුපසට වූ ලක්ෂ්‍යවලින් ධන සංඛ්‍යා ද වම්පසට වූ ලක්ෂ්‍යවලින් ඍණ සංඛ්‍යා ද නිරූපණයකෙරෙයි. ඒක මානයෙහි අතාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් නිරූපණය කළහැකි නො වෙයි. එහෙත් ද්විමානයේ දී සුදුසු මූලයක් තෝරගැනීමෙන් පසු එක් සරල රේඛාවකින් තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද එයට ලම්බ වූ රේඛාවකින් අතාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද නිරූපණය කළහැකි වෙයි. ප්‍රභින්න සංඛ්‍යා දෙකකින් නිරූපණයවන ලක්ෂ්‍ය දෙකක් අතර ඇති දුර සැමවිටම ධන වෙයි.

දැන් අපට ප්‍රශ්න ඇසිය හැකි ය. නව දැනුම නිර්මානයකරන එක් ක්‍රමයක් වනුයේ ප්‍රශ්න ඇසීම හා ඒ ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු ලබාදීම ය. අපට පළමුවෙන් ම ද්විමානයේ ප්‍රශ්නයක් ඇසිය හැකි ය. ආගන්ඩ් සටහනෙහි අප සලකන්නේ එකිනෙකට ලම්බ වූ සරල රේඛා දෙකකි. ඉන් එක් සරල රේඛාවක් තාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ද අනෙක් සරල රේඛාව අතාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ද ගනු ලැබෙයි. එහෙත් ඒකමානයෙහි දී අපට සංඛ්‍යා නිරූපනයකිරීමේ දී සරල රේඛාවක්ම අවශ්‍ය නො වෙයි. එහි දී අපට ඕනෑම වක්‍රයක් ප්‍රමාණවත් වෙයි. එලෙසින් ද්විමානයෙහි ද සරල රේඛා නොවන වක්‍ර මගින් අතාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද එනයින් සංකිර්ණ සංඛ්‍යා ද නිරූපණය කළහැකි ද?

මූලධර්මයක් ලෙස ගත්කල එය නොකළ හැකි දෙයක් නොවේ යැයි සිතෙයි. ගණිතයෙහි ප්‍රලම්බ (orthogonal) වක්‍ර නමින් වක්‍ර කුලක වෙයි. එකිනෙකට ප්‍රලම්බ වූ වක්‍ර කුලක දෙකකින් එකක ඕනෑම වක්‍රයක් අනෙක් වක්‍ර කුලකයෙහි ඕනෑම වක්‍රයක් ප්‍රලම්බ ව ඡේදනයකරයි. එහි තේරුම නම් ඒ ඡේදනයවන වක්‍ර දෙකට ඡේදක ලක්ෂ්‍යයෙහි දී අඳිනු ලබන ස්පර්ශක දෙක එකිනෙකට ලම්බ බව ය. අප දන්නා කාටීසීය ඛණ්ඩාක්ෂ හා එයට සමාන්තර රේඛා, එනම් x අක්ෂය හා එයට සමාන්තර රේඛා ද y අක්ෂය හා එයට සමාන්තර රේඛා ද ප්‍රලම්බ වක්‍ර කුලක දෙකක් වෙයි. පැහැදිලිව ම එක් වක්‍ර කුලකයක ඕනෑම වක්‍රයක් අනෙක් වක්‍ර කුලකයෙහි ඕනෑම වක්‍රයක් ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරයි. ඒ x අක්ෂය හා එයට සමාන්තර ඕනෑම රේඛාවක් y අක්ෂය හා එයට සමාන්තර ඕනෑම රේඛාවක් ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන බැවින් ය.

මූලය කේන්ද්‍රය කරගත් වෘත්ත කුලකය හා මූලය ඔස්සේ යන සරල රේඛා කුලකය තවත් ප්‍රලම්බ වක්‍ර කුලක දෙකක් වෙයි. මූලය ඔස්සේ යන ඕනෑම සරල රේඛාවක් මූලය කේන්ද්‍රය කරගත් ඕනෑම වෘත්තයක් ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන බව පහසුවෙන් ම සාධනය කළ හැකි ය. වෘත්තයකට ලක්ෂ්‍යයක දී අඳිනු ලබන ස්පර්ශකය ඒ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන අරයට ලම්බවන බව අපි දනිමු. ඉහත කී ආකාරයේ වෘත්තයක් $r = c$ සමීකරණයෙන් ද, සරල රේඛාවක් $\theta = k$ සමීකරණයෙන් ද දෙනු ලැබෙයි; මෙහි c හා k යනු පරාමිති වෙයි. අපේ ප්‍රශ්නය වනුයේ r මගින් තාත්ත්වික හෝ අතාත්ත්වික හෝ සංඛ්‍යාවක් ද, θ මගින් අතාත්ත්වික හෝ තාත්ත්වික හෝ සංඛ්‍යාවක් නිරූපණය කිරීමට හැකි ද යන්න ය. මේ ප්‍රතිඵලය වෙනත් ප්‍රලම්බ වක්‍රවලට ද වලංගුවන්නේ දැයි විමසීම අපේ අරමුණ වෙයි.

ද්විමානයෙන් ත්‍රිමානයට යෑමේ දී ප්‍රශ්නය සාධාරණයකරන්නේ කෙසේ ද? අපට එක් අක්ෂයක් තාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ද තවත් අක්ෂයක් අතාත්ත්වික අක්ෂය ලෙස ද ගතහැකි ය. එවිට තුන්වැනි අක්ෂය ගැන කිවහැක්කේ කුමක් ද? එය තාත්ත්වික ද නැත්නම් අතාත්ත්වික ද? හැමිල්ටන් නම් ගණිතඥයා මේ ප්‍රශ්නය ගැන ද තම සිත යොමු කෙළේ ය.

ඔහුට පෙනීගිය කරුණ වූයේ අක්‍ෂ තුනක් පමණක් ගෙන ප්‍රශ්නයට විසඳුමක් දිය නොහැකි බව ය. සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සාධාරණයකිරීම සඳහා අක්‍ෂ හතරක්, එනම් මාන හතරක් අවශ්‍ය බැව් ඔහු තීරණය කෙළේ ය.

හැමිල්ටන් පඬිවරයාට ත්‍රිමානය ඉක්මවා චතුර්මානයට යෑමට සිදුවූයේ කිනම් කරුණු හේතු නිසා දැයි අප තේරුම්ගත යුතු ය. චතුර්මානයේ ඉදිරිපත්කෙරුණු සංඛ්‍යාවලට චතුෂ්ට (quaternions) යැයි කියනු ලැබෙයි. චතුෂ්ටයක මාන තුනක් ම අතාත්ත්වික වන අතර එක් මානයක් පමණක් තාත්ත්වික වෙයි. එනම් අක්‍ෂ තුනක් දිගේ පිහිටි ලක්‍ෂ්‍යවලින් අතාත්ත්වික සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙන අතර එක් අක්‍ෂයක පිහිටි ලක්‍ෂ්‍යවලින් පමණක් තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙයි.

මෙහි දී තවත් අමතර කරුණු ද හැමිල්ටන් පඬිවරයා විසින් උපකල්පනය කෙරිණි. ඔහුට අනුව අතාත්ත්වික අක්‍ෂ තුන දිගේ අතාත්ත්වික සංඛ්‍යා වර්ග තුනක් වෙයි. ඒ සංඛ්‍යා i, j, k ලෙස දැක්වෙයි; මෙහි $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ වන අතර $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ වෙයි. එමෙන් ම $ji = -k$, $kj = -i$ හා $ik = -j$ වෙයි. මේ සංඛ්‍යා තුන ගුණිතයේ දී එවැනි ආකාරයකට හැසිරෙන්නේ ඇයි ද යන්න පිළිබඳ පැහැදිලි භෞතික හේතුවක් දිය නොහැකි වුව ද චතුෂ්ට ද බටහිර භෞතික විද්‍යාවට වැදගත් වෙයි. ඒ අතර අපට ඇසීමට හැකි තවත් ප්‍රශ්නයක් නම් මාන හතරට වැඩි වූ විට අතාත්ත්වික සංඛ්‍යා ගැන කුමක් කිවහැකි ද යන්න ය.

මහාචාර්ය නලින් ද සිල්වා