වෘත්ත ඉලිප්ස වීම

අතාත්ත්වික නමින් හැඳින්වෙන සංඛ්‍යා ගැන අප මෙතරම් දුරට කතාකරන්නේ ඒ සංඛ්‍යා හා තාත්ත්වික යැයි හැඳින්වෙන සංඛ්‍යා අතර ඊනියා තාත්ත්විකත්වය සම්බන්ධයෙන් ගත්කල වෙනසක් නැති බව පෙන්වීම සඳහා ය. තරල ගතිකයෙහි (Fluid Dynamics) ද විද්‍යුත්චුම්බක ප්‍රවාදයෙහි (Theory of Electromagnetism) ද සංකිර්ණ සංඛ්‍යා යොදාගැනෙන බව අපි කලින් සඳහන් කෙළෙමු. ද්විමාන අවස්ථාවන්හි දී ඇතැම් ගැටළුවල විභවය (potential), බල රේඛා (lines of force), අනාකුල රේඛා (stream lines) ආදිය සෙවීම සඳහා සංකීර්ණ සංඛ්‍යා යොදාගැනෙනු ලැබෙයි. අතාත්ත්වික සංඛ්‍යා ඔය කියන තරමම අතාත්ත්වික නම් ඊනියා තාත්ත්වික ලෝකයෙහි ඒ යොදාගැනෙන්නේ කෙසේ ද?

අතාත්ත්වික සංඛ්‍යා මෙන් ම තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද මිනිසාගේ නිර්මාන ලෙස ගත්විට මෙහි ප්‍රශ්නයක් නැති බව පෙනී යයි. මැනීමේ දී පමණක් තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවල උපකුලකයක් වූ ධන සංඛ්‍යා ප්‍රයෝජනවත් වෙයි. මෙහි දී අපට වැදගත්වන්නේ තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් සමග පමණක් නොව අතාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් සමග වුව ද ධන සංඛ්‍යාවක් සම්බන්ධකිරීමට හැකිබව ය. අතාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක හෝ සංකිර්ණ සංඛ්‍යාවක හෝ විශාලත්වය (magnitude) යනුවෙන් අර්ථදැක්වෙන රාශියක් වෙයි. සංකිර්ණ සංඛ්‍යාව z නම් එහි විශාලත්වය $|z|$ ලෙස දැක්වෙයි.

$z=x+iy$ නම් $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ වෙයි. $|z|$ ධන සංඛ්‍යාවක් බව පැහැදිලි වෙයි. එමෙන්ම සංඛ්‍යාවක් අතාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකින් ගුණකළ විට යම් භ්‍රමණයකින් ඒ ගුණිතයෙහි ප්‍රතිඵලය නිරූපනය කළහැකි බව ද අපි දුටුවෙමු. ඒ භ්‍රමණය ද යම් ආකාරයක මැනීමක් වෙයි. යම් ධන සංඛ්‍යාවකින් මැනෙන කෝණයක් ඔස්සේ භ්‍රමණය සිදුවෙයි. සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ද ලිවියහැකි බව අපි දනිමු. මෙහි r යනු ධන සංඛ්‍යාවක් වන අතර එයින් දික්කිරීමක් හෝ සංකෝචනයක් හෝ නිරූපනය වෙයි. θ යනු කෝණයක් වෙයි. එය සම්මතය අනුව සෘණ හෝ ධන හෝ විය හැකි ය. සෘණ අවස්ථාවේ දී වුව ද එයින් මැනෙන්නේ කෝණයකි. උදාහරණයක් ලෙස ගතහොත් $-\pi/2$ යන්නෙන් සම්මත අක්ෂයක සිට දක්ෂිණාවර්තව $\pi/2$ කෝණයකින් සිදුවන භ්‍රමණයක් දැක්වෙයි. $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ හි θ, ශූන්‍ය වූවිට තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් ද, $\pi/2$ වූවිට අතාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් ද ලැබෙයි.

මැනීමේ දී ප්‍රයෝජනවත්වනුයේ ධන සංඛ්‍යා වුව ද සංකිර්ණ සංඛ්‍යාවලින් ද නිරූපනයවන යම් භෞතික තත්ත්වයක් වෙයි. මෙහි දී භෞතික තත්ත්වය යන්නට අනවශ්‍ය අන්දමින් භෞතික තත්ත්වයක් ආරෝපණය නොකිරීමට වගබලාගත යුතු ය. භෞතික තත්ත්වය යන්න ද අපේ නිර්මානයක් පමණක් වන බව අමුතුවෙන් කිවයුතු නො වෙයි. තරලයක්, තරලයක් වන්නේ අපට ය. එපමණක් නොව තරලය ගලායන බව දන්නේ ද අප ය. ඇළක දොළක පිහිනන මාළුවකු ඇළෙහි හෝ දොළෙහි හෝ ගලායෑමක් පිළිබඳ කුමක් කියන්නේදැයි අපි නො දනිමු.

ඒ කෙසේ වුවත් ගල්පරයක් වටා ගලායන දිය පහරක අනාකුල රේඛා සෙවීමට සංකීර්ණ සංඛ්‍යා යොදාගත හැකි ය. ගල්පරයේ හැඩය කුමක් වුවත් සුදුසු සංකිර්ණ පරිණාමන යොදාගැනීමෙන් ඒ සරල හැඩයක් ඇති ගල්පරයක් බවට පත්කිරීමේ හැකියාව ද එහි දී යොදාගනු ලැබෙයි. සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සම්බන්ධයෙන් ගත්විට මේ පරිණාමන ඉතා වැදගත් කාර්යයක් ඉටුකරයි. එක්තරා ආකාරයකින් ගත්කල පරිණාමනයකින් කියැවෙන්නේ එක් එක් නිරීක්ෂකයාට ලෝකය පෙනෙන්නේ කෙසේ ද යන්න ය.

නැවත නැවතත් අවධාරණය කළයුතු කරුණ නම් එක් එක් නිරීක්ෂකයාට ලෝකය පෙනෙන ආකාරය යනුවෙන් අදහස් කෙරෙනුයේ නිරීක්ෂකයාගෙන් තොරව පවතින ලෝකයක් ඒ ඒ නිරීක්ෂකයාට පෙනෙන ආකාරය නොව ඒ ඒ නිරීක්ෂකයාට තමා විසින් නිර්මානය කෙරෙන ලෝකයක් පෙනෙන ආකාරය ය. ලෝකය නිර්මානය කෙරෙනුයේ ද ඒ නිරීක්ෂණය කෙරෙනුයේ ද නිරීක්ෂකයා විසින් ය. නිරීක්ෂකයාට පෙනෙන්නේ තමන් විසින් නිර්මානයකරනු ලැබූ ලෝකයක් මිස තමන්ගෙන් ස්වායත්ත ව වෙනම පවතින ලෝකයක් නො වෙයි.

අපි ආගන්ඩ් රූ සටහන් දෙකක් සලකමු. එක් ආගන්ඩ් රූසටහනක නිරූපනය වන සංකිර්ණ සංඛ්‍යා z මගින් ද අනෙක් ආගන්ඩ් රූ සටහනෙහි නිරූපනය වන සංකිර්ණ සංඛ්‍යා Z මගින් ද දක්වමු. පළමු රූ සටහනෙහි ඛණ්ඩාංක x හා y ලෙස ද දෙවැනි රූ සටහනෙහි ඛණ්ඩාංක X හා Y ලෙස ද ගනිමු. දැන් $Z = z + 1/z$ සමීකරණයෙන් ලැබෙන පරිණාමනය සලකන්න. ඒ පරිණාමනයෙන් සිදුවන්නේ පළමු රූසටහනෙහි z මගින් නිරූපණයකෙරෙන ලක්‍ෂ්‍යය දෙවැනි රූ සටහනෙහි Z මගින් නිරූපණයකෙරෙන ලක්‍ෂ්‍යය මතට අනුරූපණයවීම ය.

මෙය තවත් පැහැදිලිකරගැනීම සඳහා $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ හා $Z = R(\cos\Theta + \sin\Theta)$ ලෙස ලියමු. එවිට ඉහත සඳහන් පරිණාමනය $R(\cos\Theta + \sin\Theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) + 1/[r(\cos\theta + i\sin\theta)]$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි ය. එහෙත් සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවන්හි ගුණ අනුව $1/[r(\cos\theta + i\sin\theta)]$ යනු $(\cos\theta - i\sin\theta)/r$ වෙයි. එයට හේතුව $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ වීම ය. එවිට $R(\cos\Theta + \sin\Theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)/r$ වෙයි. දැන් සමීකරණයෙහි දෙපැත්තේ ඇත්තේ සංකිර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් බැවින් ඒ සංඛ්‍යා එකිනෙකට සමානවීම සඳහා සමීකරණයෙහි එක්පැත්තක තාත්ත්වික කොටස එහි අනෙක් පැත්තෙහි තාත්ත්වික කොටස සමග ද, සමීකරණයෙහි එක් පැත්තක අතාත්ත්වික කොටස එහි අනෙක් පැත්තෙහි අතාත්ත්වික කොටස සමග ද සමාන විය යුතු ය.

එසේ තාත්ත්වික කොටස් හා අතාත්ත්වික කොටස් සමානකිරීමෙන් ලැබෙන්නේ පහත දැක්වෙන සමීකරණ දෙක ය. $R\cos\Theta = (r + 1/r)\cos\theta$, . $R\sin\Theta = (r - 1/r)\sin\theta$. යම් ඛණ්ඩාංක පද්ධතියක් අනුබද්ධයෙන් සංකිර්ණ සංඛ්‍යාවක තාත්ත්වික කොටසින්, ඒ සංකිර්ණ සංඛ්‍යාව මගින් නිරූපණයකෙරෙන ලක්‍ෂ්‍යයෙහි x ඛණ්ඩාංකය ද, අතාත්ත්වික කොටසින් y ඛණ්ඩාංකය ද ලැබෙයි. එබැවින් $Z = X + iY$ ලෙස ගැනීමෙන් ඉහත සඳහන් සමීකරණ දෙක $X = (r + 1/r)\cos\theta$ හා $Y = (r - 1/r)\sin\theta$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

මේ සමීකරණ ඔස්සේ අපට z රූප සටහනෙහි සිට Z රූප සටහනට පරිණාමනය වීමේ දී ඒ ඒ වක්‍ර පරිණාමනය වන්නේ කෙසේදැයි දැනගත හැකි ය. උදාහරණයක් ලෙස z රූප සටහනෙහි වෘත්තයක් පරිණාමනයෙන් Z රූප සටහනෙහි ලැබෙන්නේ කිනම් වක්‍රයක්දැයි සොයා බලමු. z රූප සටහනෙහි වෘත්තයක් සඳහා r නියතයක් වෙයි. එනම් $r = k$ වෙයි. $r = k$ ඉහත සඳහන් සමීකරණවල ආදේශකිරීමෙන් අපට $X = (k + 1/k)\cos\theta$ හා $Y = (k - 1/k)\sin\theta$ ලැබෙයි. අපට ඒ ප්‍රකාශන $X/(k + 1/k) = \cos\theta$ හා $Y/(k - 1/k) = \sin\theta$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය. k නියතයක් බැවින් $k + 1/k = a$ හා $k - 1/k = b$ ලෙස ලිවීමෙන් අපට $X/a = \cos\theta$ හා $Y/b = \sin\theta$ යන ප්‍රකාශන ලැබෙයි. මෙහි a හා b නියත වෙයි. එසේ නම් අපට ලැබී ඇත්තේ a හා b නියත වූ $(X/a)^2 + (Y/b)^2 = 1$ යන සමීකරණය ය. මේ සමීකරණයෙන් අපට ලැබෙන්නේ ඉලිප්සයකි.

මෙයින් කියැවෙන්නේ වෘත්තයක් z රූප සටහනෙහි සිට Z රූප සටහනට පරිණාමනය වීමේ දී ඉලිප්සයක් බවට අනුරූපණය වන බව ය. එක් නිරීක්‍ෂකයකුට වෘත්තයක් ලෙස පෙනෙන්නක් තවත් නිරීක්‍ෂකයකුට ඉලිප්සයක් ලෙස පෙනෙයි. නැවතත් කිවයුත්තේ ඒ ඒ නිරීක්‍ෂකයකට යමක් වෘත්තයක් හා ඉලිප්සයක් ලෙස පෙනෙන බව නොව ඒ ඒ නිරීක්‍ෂකයා වෘත්තයක් හා ඉලිප්සයක් නිර්මානය කරගන්නා බව ය. සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නොමැතිව වුව ද එවැනි පරිණාමන ලබාගත හැකි වුවත් එලෙස එක් තලයක් තවත් තලයකට, තල අර්ධයකට ආදී වශයෙන් පහසුවෙන් පරිණාමනය කෙරෙන්නේ ආගන්ඩ් රූප සටහන් යොදාගැනීමේ දී ය. භෞතීය නිරූපණවල දී සංකිර්ණ සංඛ්‍යාවක අතාත්ත්වික කොටස යන්න තාත්ත්වික යැයි කියන කොටසට වඩා තාත්ත්වික වන්නේවත් අතාත්ත්වික වන්නේවත් නැති බව මෙයින් ද පැහැදිලි වෙයි.

දැන් අපට තවත් ප්‍රශ්නයක් ඇසීමට හැකිවෙයි. අයින්ස්ටයින් විද්වතා විසින් අවුරුදු සියයකට පෙර ඉදිරිපත්කරන ලද විශේෂ සාපේක්‍ෂතා ප්‍රවාදයෙහි ද මෙවැනි දෑ නිතර හමුවෙයි. එක් නිරීක්‍ෂකයකුගේ වෘත්තයක් ඒ නිරීක්‍ෂකයාට සාපේක්‍ෂව යම් ප්‍රවේගයකින් චලනයවන වෙනත් නිරීක්‍ෂකයකුගේ ඉලිප්සයක් විය හැකි ය. විශේෂ සාපේක්‍ෂතා ප්‍රවාදයෙහි සංකිර්ණ සංඛ්‍යා යොදාගත හැකි ද? යොදාගැනෙන්නේ ද?

විශේෂ සාපේක්ෂතා ප්‍රවාදයෙහි යම් නිරීක්ෂයකුට සාපේක්ෂව වෙනත් නිරීක්ෂකයකු v නම් ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් චලනයවන්නේ යැයි සිතමු. මේ නිරීක්ෂකයන් දෙදෙනා එකිනෙකා පසුකර යන ක්ෂණයෙහි දී දෙදෙනා පිහිටි ලක්ෂ්‍යය දෙදෙනාගේ ම මූල ලක්ෂ්‍ය ලෙස දෙදෙනාම කාලය මැනීමේ දී ද ඒ ක්ෂණය ශූන්‍ය ලෙස ද ගන්නේ යැයි සිතමු. නිරීක්ෂකයන් දෙදෙනා එකිනෙකාට සාපේක්ෂව චලනය වන දිශාව සුදුසු පරිදි එකිනෙකාගේ x අක්ෂයේ අභිදිශාවක් ලෙස ද ගත්තේ යැයි සිතමු. දැන් එක් නිරීක්ෂකයකුට සාපේක්ෂව යම්කිසි සිද්ධියක ඛණ්ඩාංක x හා t ලෙස ද, අනෙක් නිරීක්ෂකයාට සාපේක්ෂව ඒ සිද්ධියෙහි ඛණ්ඩාංක X හා T ලෙස ද ගත්තේයැයි සිතමු. එවිට විශේෂ සාපේක්ෂතා ප්‍රවාදයට අනුව $x^2 - c^2 t^2 = X^2 - c^2 T^2$ වෙයි. වෙනත් වචනවලින් කියන්නේ නම් කිනම් නිරීක්ෂකයකු ගත්ත ද, $x^2 - c^2 t^2$ යන්න අචලකයක් (invariant) වෙයි. මේ අචලකය ඉතා වැදගත් වූවක් වෙයි.

යුක්ලීඩීය ජ්‍යාමිතියෙහි ද මෙවැනි අචලකයක් ලැබෙයි. කිනම් නිරීක්ෂකයකු ගත්ත ද ලක්ෂ්‍ය දෙකක් අතර දුර එහි දී අචලකයක් වෙයි. ඒ ලක්ෂ්‍ය දෙකෙන් එකක් නිරීක්ෂකයන්ගේ ඛණ්ඩාක්ෂ පද්ධතිවල මූලය ලෙස ගත්කල ලක්ෂ්‍ය අතර දුරෙහි වර්ගය අනෙක් ලක්ෂ්‍යයෙහි (x, y) ඛණ්ඩාංක ඇසුරෙන් $x^2 + y^2$ ලෙස ලිවිය හැකි ය. නිරීක්ෂකයන්ගේ පොදු මූලයෙහි ඛණ්ඩාංක (0, 0) බව අමතක නොකළ යුතු ය. මේ ප්‍රකාශය විවිධ නිරීක්ෂකයන් සම්බන්ධයෙන් අචලකයක් වෙයි. මෙය පෛතගරස් ප්‍රමේයයෙන් ලැබෙන අචලකයක් වෙයි. පෛතගරස් ප්‍රමේයය ඔස්සේ ලැබෙන අචලකය හා විශේෂ සාපේක්ෂතා ප්‍රවාදයෙන් ලැබෙන අචලකය අතර සමානකමක් මෙන් ම අසමානකමක් ද වෙයි. පෛතගරස් ප්‍රමේයයේ අචලකයෙහි දක්නට ලැබෙන ධන ලකුණ වෙනුවට විශේෂ සාපේක්ෂතා ප්‍රවාදයෙන් ලැබෙන අචලකයෙහි ඇත්තේ ඍණ ලකුණකි. එය ධන බවට පත්කරගත හැකි වෙයි ද?

මහාචාර්ය නලින් ද සිල්වා